BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

ОБ ОБОБЩЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М.Ю.САЛИМОВ

Бакинский Государственный Университет

sem_dayi@rambler.ru

sem-dayi@mail.ru

В данной работе дано определение обобщенного решения одного класса краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка на конечном отрезке и получены условия существования и единственности таких решений. Условия, обеспечивающие разрешимость данной задачи, выражены через свойства операторных коэффициентов операторно-дифференциального уравнения.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим следующую граничную задачу:

$$-\left(\frac{d}{dt}-\omega_1 A\right)\left(\frac{d}{dt}-\omega_2 A\right)u(t)+\sum_{j=0}^{2}A_{2-j}u^{(j)}(t)=f(t),\quad t\in[0;1], \qquad (1)$$

$$u(0)=u(1)=0, \qquad (2)$$

где $u(t), f(t)$ - векторно-значные функции со значениями в H, а операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

1) A - положительно определенный самосопряженный оператор;

2) числа $\omega_1<0,\ \omega_2>0$;

3) операторы $D_0=A_0,\ D_1=A_1A^{-1},\ D_2=A^{-1}A_2A^{-1}$ ограничены в H.

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории обобщенных функций [1].

Определим шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A, т.е. $H_\gamma=D(A^\gamma),\ \gamma\ge 0,\quad (x,y)_\gamma=(A^\gamma x, A^\gamma y),\ x,y\in H_\gamma$. При $\gamma=0$ считаем, что $H_0=H,\ (x,y)_0=(x,y),\ x,y\in H$.

Обозначим через $L_2((0;1);H)$ гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$ со значениями в H, причем

$$\|f\|_{L_2((0;1);H)}=\left(\int_0^1\|f(t)\|_H^2\,dt\right)^{1/2}<\infty .$$

Далее, при $m\ge 1$ рассмотрим следующие гильбертовы пространства:

$$W_2^m((0;1);H)=\left\{u(t)\middle| A^m u\in L_2((0;1);H), u^{(m)}\in L_2((0;1);H)\right\}$$

нормой

$$\|u\|_{W_2^m((0;1);H)}=\left(\left\|u^{(m)}\right\|_{L_2((0;1);H)}+\left\|A^m u\right\|^2_{L_2((0;1);H)}\right)^{1/2}.$$

Обозначим через $D((a;b);H_m)$ линейное множество бесконечно дифференцируемых функцией со значениями в H_m, имеющие компактные носители в [0; 1]. Пусть $\overset{0}{D}((a;b);H_1)$ подмножество множества $D((0,1);H_1)$, элементы которых удовлетворяют условиям $u(0)=0, u(1)=0$, т.е.

$$\overset{0}{D}((0;1);H_1)=\{u| u\in D((0;1);H_1), u(0)=u(1)=0\}.$$

Далее обозначим через

$$\overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)=\left\{u\middle| u\in W_2^1((0;1);H), u(0)=u(1)=0\right\}.$$

Из теоремы полноты и теоремы о следах следует, что $\overset{0}{D}((a;b);H_1)$ плотно в полном пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)$ ([1], стр. 23,29).

Определение 1. Вектор-функция $u(t)\in \overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2), если для любой вектор-функции $\psi\in \overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)$ имеет место тождество

$$\begin{aligned}&(u',\psi')_{L_2((0;1);H)}+|\omega_1\omega_2|(Au,A\psi)_{L_2((0;1);H)}-(\omega_1+\omega_2)(Au,\psi')_{L_2((0;1);H)}+\\&+\hat{l}_1(u,\psi)=(f,\psi)_{L_2((0;1);H)},\end{aligned}\tag{3}$$

где $\hat{l}_1(u,\psi)$ - непрерывное продолжение на пространство $\overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)\oplus \overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)$ билинейного функционала

$$l_1(u,\psi)=\sum_{j=0}^{2}\left(A_j u^{(2-j)},\psi\right)_{L_2((0;1);H)},$$

заданного первоначально для всех вектор - функций из $\overset{0}{D}((0;1);H_1)\oplus \overset{0}{D}((0;1);H_1)$, определенного следующим образом:

$$\hat{l}_1(u,\psi)\equiv-(A_0u',\psi')_{L_2((0;1);H)}-(A_1u,\psi')_{L_2((0;1);H)}+(A_2u,\psi)_{L_2((0;1);H)}.\tag{4}$$

Из условий 1)-3) следует, что билинейный функционал $l_1(u,\psi)$ можно продолжить до билинейного функционала $\hat{l}_1(u,\psi)$. Действительно, после интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned}&l_1(u,\psi)=\left(A_0u'',\psi\right)_{L_2((0;1);H)}+\left(A_1u',\psi\right)_{L_2((0;1);H)}+\left(A_2u,\psi\right)_{L_2((0;1);H)}=\\&=-\left(A_0u',\psi'\right)_{L_2((0;1);H)}-\left(A_1A^{-1}Au,\psi'\right)_{L_2((0;1);H)}+\left(A^{-1}A_2A^{-1}Au,A\psi\right)_{L_2((0;1);H)}.\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\left|l_1(u,\psi)\right| \le \left\|A_0\right\|\left\|u'\right\|_{L_2((0;1);H)}\left\|\psi'\right\|_{L_2((0;1);H)} + \left\|A_1A^{-1}\right\|\left\|Au\right\|_{L_2((0;1);H)}\left\|\psi'\right\|_{L_2((0;1);H)} +$$
$$+\left\|A^{-1}A_2A^{-1}\right\|\left\|Au\right\|_{L_2((0;1);H)}\left\|A\psi\right\|_{L_2((0;1);H)}.$$

А отсюда следует, что билинейный функционал $l_1(u,\psi)$ можно продолжить непрерывно из пространства $\overset{0}{D}((0;1);H_1)\oplus\overset{0}{D}((0;1);H_1)$ на пространство $\overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)\oplus\overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)$.

Теперь мы укажем условия существования обобщенного решения задачи (1), (2). Отметим, что условия существование регулярного решения задачи (1), (2) получены в работе [2] автора. А в работе [3] получены условия существования обобщенного решения задачи (1), (2) в другой форме при $\omega_1=-1, \omega_2=1$ и $A_0=0$. В бесконечной области существование обобщенного решения для уравнения, главная часть которого имеет вид $(-1)^n\dfrac{d^{2n}}{dt^{2n}}+A^{2n}$, получено в работе [4], а в работе [5] этот вопрос изучен для одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными и переменными операторными коэффициентами. В работе [6] аналогичная задача рассмотрена в бесконечной области в случае $\omega_1=-1,\ \omega_2=1,\ A_0=0.$

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть выполняются условия 1)–3). Если имеет место неравенство $\alpha=\sum\limits_{j=0}^{2}c_j\left\|D_j\right\|<1$, где $c_0=1,\ c_1=\dfrac{1}{2\left|\omega_1\omega_2\right|^{1/2}},\ c_2=\dfrac{1}{\left|\omega_1\omega_2\right|}$, то задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение при любом $f\in L_2((0;1);H)$.

Доказательство. Обозначим через
$$P_0(d/dt)u=-\left(\frac{d}{dt}-\omega_1A\right)\left(\frac{d}{dt}-\omega_2A\right)u,\quad P_1(d/dt)u=\sum_{j=0}^{2}A_ju^{(2-j)}.$$

Тогда очевидно, что при любом $\psi\in\overset{0}{D}((0;1);H_1)$ имеет место неравенство:
$$\left|\left(P(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)}\right|=\left|\left(P_0(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)}+\left(P_1(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)}\right|\ge$$
$$\ge\left|\left(P_0(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)}\right|-\left|\left(P_1(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)}\right|\ge\operatorname{Re}\left(P_0(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)}- \quad (5)$$
$$-\left|\left(P_1(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)}\right|.$$

С другой стороны, имеем:
$$\operatorname{Re}\left(P_0(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)}=-\operatorname{Re}\left(\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}+(\omega_1+\omega_2)A\frac{d\psi}{dt}-\omega_1\omega_2A^2\psi\right),\psi\right)_{L_2((0;1);H)}=$$
$$=(\psi',\psi')_{L_2((0;1);H)}-(\omega_1+\omega_2)\operatorname{Re}(A\psi,\psi')_{L_2((0;1);H)}+\left|\omega_1\omega_2\right|(A^2\psi,\psi)_{L_2((0;1);H)}= \quad (6)$$
$$=\left\|\psi'\right\|^2_{L_2((0;1);H)}+\left|\omega_1\omega_2\right|\left\|A\psi\right\|^2_{L_2((0;1);H)},$$

поскольку при $\psi \in \overset{0}{D}((0;1);H_1)$ имеет место равенство

$$(A\psi,\psi')_{L_2((0;1);H)} = \int_0^1 (A\psi,\psi')dt = \left\|A^{1/2}\psi(t)\right\|_H^2\Big|_0^1 - (\psi',A\psi)_{L_2((0;1);H)} = -(\psi',A\psi)_{L_2((0;1);H)}$$

или

$$2\operatorname{Re}(A\psi,\psi')_{L_2((0;1);H)} = (A\psi,\psi')_{L_2((0;1);H)} + (\psi',A\psi)_{L_2((0;1);H)} = 0.$$

Далее имеем:

$$\left|(P_1(d/dt)\psi,\psi)_{L_2((0;1);H)}\right| = \left|\hat{l}_1(\psi,\psi)\right| = \left|-(A_0\psi',\psi')_{L_2((0;1);H)} - (A_1A^{-1}A\psi,\psi')_{L_2((0;1);H)} + \right.$$

$$\left. + (A^{-1}A_2A^{-1}A\psi,A\psi)_{L_2((0;1);H)}\right| \le \|D_0\|\|\psi'\|^2_{L_2((0;1);H)} + \|D_1\|\|A\psi\|_{L_2((0;1);H)}\|\psi'\|_{L_2((0;1);H)} + \quad (7)$$

$$+\|D_2\|\|A\psi\|^2_{L_2((0;1);H)} \quad .$$

Применяя неравенство Юнга, получаем

$$\|\psi'\|_{L_2((0;1);H)}\|A\psi\|_{L_2((0;1);H)} \le \frac{1}{2|\omega_1\omega_2|^{1/2}}\left(\|\psi'\|^2_{L_2((0;1);H)} + |\omega_1\omega_2|\|A\psi\|^2_{L_2((0;1);H)}\right).$$

Учитывая это неравенство в (7), с учетом равенства (6), находим:

$$\left|(P_1(d/dt)\psi,\psi)_{L_2((0;1);H)}\right| = \left|\hat{l}_1(\psi,\psi)\right| \le \|D_0\|\|\psi'\|^2_{L_2((0;1);H)} + \|D_1\|\frac{1}{2|\omega_1\omega_2|^{1/2}}\left(\|\psi'\|^2_{L_2((0;1);H)} + \right.$$

$$\left. + |\omega_1\omega_2|\|A\psi\|^2_{L_2((0;1);H)}\right) + \|D_2\|\frac{1}{|\omega_1\omega_2|}|\omega_1\omega_2|\|A\psi\|^2_{L_2((0;1);H)} \le$$

$$\le \left(\|D_0\| + \frac{1}{2|\omega_1\omega_2|^{1/2}}\|D_1\| + \frac{1}{|\omega_1\omega_2|}\|D_2\|\right)\left(\|\psi'\|^2_{L_2((0;1);H)} + |\omega_1\omega_2|\|A\psi\|^2_{L_2((0;1);H)}\right) =$$

$$= \alpha \operatorname{Re}(P_0(d/dt)\psi,\psi)_{L_2((0;1);H)} \quad .$$

Таким образом, из (5) получаем, что при любом $\psi \in \overset{0}{D}((0;1);H_1)$ имеет место неравенство:

$$\operatorname{Re}\left(P(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)} \ge (1-\alpha)\operatorname{Re}\left(P_0(d/dt)\psi,\psi\right)_{L_2((0;1);H)} =$$

$$= (1-\alpha)\left(\|\psi'\|^2_{L_2((0;1);H)} + |\omega_1\omega_2|\|A\psi\|^2_{L_2((0;1);H)}\right) \ge const\|\psi\|^2_{W_2^1((0;1);H)} \quad . \qquad (8)$$

В работе [2] показано, что при любом $f(t) \in L_2((0;1);H)$ существует единственное регулярное решение $u_0(t)$ задачи

$$P_0(d/dt)u(t) = f(t), \qquad (9)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \qquad (10)$$

т.е. $u_0(t) \in W_2^2((0;1);H)$ и удовлетворяет уравнению (9) в [0,1] почти всюду, а граничные условия удовлетворяются в смысле сходимости пространства $H_{3/2}$.

Тогда, очевидно, что $u(t) \in W_2^1((0;1);H)$ и является обобщенными решением задачи (9), (10). Теперь будем разыскивать решение задачи (1), (2) в виде

$$u(t) = u_0(t) + \omega(t),$$

где $u(t) \in \overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)$. Так как для любого $\psi \in \overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)$

$$\left(P_0(d/dt)u_0, \psi\right)_{L_2((0;1);H)} = (f, \psi)_{L_2((0;1);H)},$$

то из уравнения (1) получаем:

$$\left(P(d/dt)(u_0 + \omega), \psi\right)_{L_2((0;1);H)} = \left(P_0(d/dt)u_0, \psi\right)_{L_2((0;1);H)} + \left(P_1(d/dt)u_0, \psi\right)_{L_2((0;1);H)} + \\ + \left(P(d/dt)\omega, \psi\right)_{L_2((0;1);H)} = (f, \psi)_{L_2((0;1);H)}$$

или

$$\left(P(d/dt)\omega, \psi\right)_{L_2((0;1);H)} = -\left(P_1(d/dt)u_0, \psi\right)_{L_2((0;1);H)}.$$

Следовательно,

$$[\omega, \psi] \equiv (\omega', \psi')_{L_2((0;1);H)} - (\omega_1 + \omega_2)(A\omega, \psi')_{L_2((0;1);H)} + |\omega_1\omega_2|(A\omega, A\psi)_{L_2((0;1);H)} + \\ + \hat{l}_1(\omega, \psi) = -l_1(u_0, \psi). \tag{11}$$

Правая часть в равенстве (11) определяет непрерывный функционал при $\psi \in \overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)$. Левая часть, в силу неравенства (8), удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re}[\psi, \psi] \geq const\|\psi\|^2_{W_2^1((0;1);H)},$$

т.е. выполняются условия теоремы Лакса-Мильграма [7,8]. Тогда существует единственная вектор-функция $\omega \in \overset{0}{W}{}_2^1((0;1);H)$, которая удовлетворяет соотношению (11). Таким образом, $u(t) = u_0(t) + \omega(t)$ является единственным обобщенным решением задачи (1), (2). Теорема доказана.

Следствие. Пусть A-положительно-определенный самосопряженный оператор, операторы $D_0 = A_0$, $D_1 = A_1A^{-1}$, $D_2 = A^{-1}A_2A^{-1}$ ограничены в H и имеет место неравенство

$$\sum_{j=0}^{2} c_j\|D_j\| < 1,$$

где $c_0 = 1,\ c_2 = 1,\ c_1 = \dfrac{1}{2}$. Тогда задача

$$-\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A^2u(t) + \sum_{j=0}^{2} A_j u^{(2-j)}(t) = f(t),\ t \in [0;1],$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 0,$$

имеет единственное обобщенное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Salimov M.Y. On conditions of correct solvability of the boundary- value problem for one class of the second order operator – differential equations on finite segment // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2001, v. 14(22), p. 94-99.
3. Оразов М.Б. О полноте систем элементарных решений для некоторых операторных-дифференциальных уравнений на полуоси и на отрезке// ДАН СССР, 1979, т.245, №4, с. 788-792.
4. Мирзоев С.С. Об обобщенном решении краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // В сб. «Прикладные вопросы функционального анализа», БГУ, Баку, 1987, с.61-68.
5. Aliev A.R. On the generalized solution of the boundary value-problem for the operator differential equations of the second order with variable coefficients // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2006, v.2, №1, p. 87-93.
6. Мирзоев С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Автореферат диссертации, БГУ, Баку: 1994, 32 с.
7. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967, 464 с.
8. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966, 351 с.

SONLU PARÇADA İKİTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SİNİF SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİ HAQQINDA

M.Y.SƏLİMOV

XÜLASƏ

İşdə sonlu parçada ikitərtibli operator-diferensial tənliklər üçün bir sinif sərhəd məsələlərinin ümumiləşmiş həllinin tərifi verilir və tədqiq olunan məsələnin bu cür həllərinin varlığı və yeganəliyi şərtləri göstərilir. Həmin məsələnin həll olunmasını təmin edən şərtlər operator-diferensial tənliyinin operator əmsallarının xassələri ilə ifadə olunmuşdur.

ON THE GENERALIZED SOLUTION OF A CLASS BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER ON FINITE INTERVAL

M.Y.SALIMOV

SUMMARY

The article presents the definition of the generalized solution of one class boundary value problems for the operator - differential equations of the second order on finite interval. The condition of the existence and uniqeness for such solutions of the investigated problem is received as well. The conditions satisfiying the solvability of the given problem are expressed through the properties of the operator coefficients of operator - differential equations.